# Mackey functor と G-functor再論(群論)



吉田, 知行

数理解析研究所講究録
580巻 1986年 124-148


# Mackey functor と G-functor 再論

北大・理　吉田知行 (Tomoyuki Yoshida)

筆者は昔有限群の transfer 定理に興味を持って勉強していたのだが，その過程で transfer 定理の証明に必要なのは，transfer 写像の持つ性質のうちほんのわずかのこと（とくに Mackey 分解）であることに気付いた．また有限群の表現論にも transfer 定理に似た形のものがあるのを不思議に思っていた．それ以来有限群の transfer 定理を，Green の導入した G-functor に拡張し，さらにそれをモジュラー表現論に応用しようとしてきた．この考えは成功したとはとても言えないが，応用についてはやっと目鼻がついてきた状況である．単なる一般論から脱っしつつある現状を紹介したい．ここでの最終目標は，群の作用するグラフやデザインへの応用である．

## §1. G-functor.

J. A. Green が 1971 年に導入した G-functor の概念を，

記号を少し変えて定義する．

<u>Def</u>. $G$ を有限群，$k$ を可換環とする．$G$-functor $(\mathfrak{a}, \tau, \rho, \sigma)$ は，$k$-加群の族 $\mathfrak{a}(H)$, $H \leq G$ と写像の族

$$\tau_H^K : \mathfrak{a}(H) \longrightarrow \mathfrak{a}(K)\ ;\ \alpha \longmapsto \alpha^K, \qquad H \leq K \leq G\ ;$$
$$\rho_H^K : \mathfrak{a}(K) \longrightarrow \mathfrak{a}(H)\ ;\ \beta \longmapsto \beta_H, \qquad H \leq K \leq G\ ;$$
$$\sigma_H^g : \mathfrak{a}(H) \longrightarrow \mathfrak{a}(H^g)\ ;\ \alpha \longmapsto \alpha^g, \qquad H \leq G,\ g \in G,$$

（ここで，$H^g := g^{-1}Hg$）で次の公理をみたすものから成る．以下では，$\alpha \in \mathfrak{a}(H)$，$\beta \in \mathfrak{a}(K)$ とする．

(G.1) $\alpha^H = \alpha$, $(\alpha^K)^L = \alpha^L$ $\quad$ if $H \leq K \leq L \leq G$ ;

(G.2) $\beta_K = \beta$, $(\beta_H)_D = \beta_D$ $\quad$ if $D \leq H \leq K \leq G$ ;

(G.3) $(\alpha^g)^{g'} = \alpha^{gg'}$, $\alpha^h = \alpha$ $\quad$ if $g, g' \in G$, $h \in H$ ;

(G.4) $(\alpha^K)^g = (\alpha^g)^{K^g}$, $(\beta_H)^g = \beta^g{}_{H^g}$ $\quad$ if $H \leq K \leq G$, $g \in G$ ;

(G.5)（Mackey 分解）$H, K \leq L \leq G$ に対し，

$$\alpha^L{}_K = \sum_{g \in H \backslash L / K} \alpha^g{}_{H^g \cap K}{}^K \qquad (g \text{ は代表元を動く}).$$

明らかに，$H \longmapsto R(H)$（指標環）は，induction map, restriction map などとともに，上の公理をみたす．また，$V$ が $kG$-加群のとき，$H \longmapsto H^n(H, V)$（コホモロジー群）も cor, res, con によって $G$-functor になる．$n = 0$ のときは，$H^0(H, V) = V^H := \{v \in V \mid vh = v \ \ \forall h \in H\}$ に注意．

<u>Def.</u> G-functor の間の morphism $\theta: \mathfrak{a} \to \mathfrak{b}$ は，$k$-linear map の族 $\theta(H): \mathfrak{a}(H) \to \mathfrak{b}(H)$, $H \leq G$, で，$\tau, \rho, \sigma$ と可換なものから成る．したがって G-functor のカテゴリー $\mathfrak{M}_k(G)$ を得る．

例えば，$kG$-hom $U \to V$ は $H^n(-, U) \to H^n(-, V)$ を誘導する．

<u>Def.</u> G-functor $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ に対し，pairing $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} \to \mathfrak{c}$ は，$k$-bilinear map の族

$$\mathfrak{a}(H) \times \mathfrak{b}(H) \to \mathfrak{c}(H) \quad ; (\alpha, \beta) \longmapsto \alpha \cdot \beta$$

で，以下の公理をみたすものから成る：（$H \leq K$, $g \in G$; $\alpha \in \mathfrak{a}(H)$, $\alpha' \in \mathfrak{a}(K)$, $\beta \in \mathfrak{b}(H)$, $\beta' \in \mathfrak{b}(K)$ とする）．

(P.1) $(\alpha' \cdot \beta')_H = \alpha'_H \cdot \beta'_H$, $(\alpha \cdot \beta)^g = \alpha^g \cdot \beta^g$ ;

(P.2) $\alpha^K \cdot \beta' = (\alpha \cdot \beta'_H)^K$ ;

(P.3) $\alpha' \cdot \beta^K = (\alpha'_H \cdot \beta)^K$ .

上で，(P.2) と (P.3) は Frobenius の相互律である．

これによって普通の環や加群の場合と同様に，G-functor についても "ring" や "module" の概念が定義される．例えば，$H \mapsto R(H)$ は "ring" であり，また $U \times V \to W$ が $kG$ 加群の G-pairing なら，$H^n(-, U) \times H^n(-, V) \xrightarrow{\cup} H^n(-, W)$ は

G-functor の pairing である．A が G-algebra なら，
$H^n(-,A)$ は "ring" である．

さて，Green の結果を述べよう．G-functor $\mathfrak{a}$ と $D \le H \le G$ に対し，$\mathfrak{a}(D)^H := \mathrm{Im}\,(\tau_D^H : \mathfrak{a}(D) \to \mathfrak{a}(H))$ とおく．
さらに H の部分群のある族 $\mathfrak{X}$ に対し，

$$\mathfrak{a}(\mathfrak{X})^H := \sum_{X \in \mathfrak{X}} \mathfrak{a}(X)^H$$

とおく．$\mathrm{Sub}(G) := \{H \le G\}$ とする．

<u>Def.</u> G-functor $\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{X} \subseteq \mathrm{Sub}(G)$ に対し，$\mathfrak{a}$ が $\mathfrak{X}$-projective $\underset{def}{\Leftrightarrow}$ $\mathfrak{a}(G) = \mathfrak{a}(\mathfrak{X})^G$．また $\mathfrak{X}$ が $\mathfrak{a}$ の defect base $\underset{def}{\Leftrightarrow}$ $\mathfrak{X}$ は subconjugate closed で $\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{X}$-projective，かつ $\mathfrak{X}$ はこの性質をみたすもののうちで最小のもの．

例えば，$H \mapsto R(H)$（指標環）について言えば，その defect base はいわゆる基本部分群全体の族である．加群の vertex や，ブロックの defect group もこの方法で定義できる．

<u>定理</u> (Green) G-functor $\mathfrak{a}$ が "ring"[1] なら，$\mathfrak{a}$ はただ一つの defect base をもつ．

<u>定理</u> (Green). $\mathfrak{a}$ を G-functor，$D \le H \le G$ とし，

$$\mathfrak{X} := \{D^g \cap D \mid g \in G - H\} \subseteq Sub(D),$$
$$\mathfrak{Y} := \{D^g \cap H \mid g \in G - H\} \subseteq Sub(H)$$

とおく。もし $\mathfrak{a}(\mathfrak{X})^H = \mathfrak{a}(D)^H \cap \mathfrak{a}(\mathfrak{Y})^H$ なら、

$$\mathfrak{a}(D)^G / \mathfrak{a}(\mathfrak{X})^G \cong \mathfrak{a}(D)^H / \mathfrak{a}(\mathfrak{X})^H.$$

これはいわば加群の Green 対応の変形である。このほか、Green は、$e^2 = e \in \mathfrak{a}(G)$ に対し、G-functor $e\mathfrak{a}e : H \mapsto e_H\,\mathfrak{a}(H)e_H$ の defect base を $e$ の defect base $\mathfrak{D}(e)$ と呼んで、ある場合（$eAe/J(eAe)$ が division ring のとき）に $\mathfrak{D}(e) = \{X \leq_G D\}$ となる $D$ の存在を示した。これについて、Brauer の first main が成立している。

## §2. transfer 定理と induction 定理.

<u>Def</u>. G-functor $\mathfrak{a}$ が cohomological $\underset{def}{\Leftrightarrow}$ $\beta_H{}^K = |K:H|\beta$ $\forall H \leq K \leq G$.

さて、cohomological G-functor についていくつかの transfer 定理がある。例えば D. Higman の focal subgroup 定理は次のような形になる：

定理. $\mathfrak{a}$ を cohomological な G-functor, $P \in Syl_p(G)$, さらに係数環 $k$ において $|G:P|$ が逆元をもつと仮定する. このとき, $\rho_P^G$ によって

$$\mathfrak{a}(G) \cong \{\alpha \in \mathfrak{a}(P) \mid \alpha^g{}_{P^g \cap P} = \alpha_{P^g \cap P} \quad \forall g \in G\}.$$

この結果は群のコホモロジー群の場合に良く知られている. この他 Wielandt 型の transfer 定理も作れる ([Yo. 80]).

cohomological でない場合の transfer 定理は少し修正を要する.

定理. $\mathfrak{r}$ を "ring", $\mathfrak{a}$ を "$\mathfrak{r}$-module", $\mathfrak{r}$ は H-projective とする. すると $\exists \varphi \in \mathfrak{r}(H)$ s.t. $\varphi^G = 1$. このとき次は完全系列である.

$$0 \longrightarrow \mathfrak{a}(G) \xrightarrow{\rho_H^G} \mathfrak{a}(H) \underset{\rho''}{\overset{\rho'}{\rightrightarrows}} \prod_{g \in H\backslash G/H} \mathfrak{a}(H^g \cap H)$$

ここで, $\rho'(\alpha) = (\alpha^g{}_{H^g \cap H}\, \varphi^g{}_{H^g \cap H})_g$,

$$\rho''(\alpha) = (\alpha_{H^g \cap H}\, \varphi^g{}_{H^g \cap H})_g .$$

即ち, $\mathfrak{a}(G) \cong \{\alpha \in \mathfrak{a}(H) \mid \rho'(\alpha) = \rho''(\alpha)\}$.

(この結果は sheaf を思い出させる).

Wielandt 型の transfer 定理については, [Sa. 82] にある.

応用として佐々木氏の次の定理がある.

<u>定理</u>. $F$を標数$p \neq 0$の体, $U$を直既約$FG$加群, $vtx(U) = D$はアーベル群, $W$を$U$の source とする. $N_G(D) \leq H \leq G$, $V$を$U$の Green 対応とする (i.e. $V$は直既約$FH$加群で, $vtx(V) = D$, $U \mid V^G$). $\forall d \in D$に対し, $W(d-1)^{p-1} = 0$と仮定する. このとき, コホモロジー群の同型

$$\hat{H}^*(G, U) \cong \hat{H}^*(H, V)$$

がある.

さて, G-functor については transfer 定理と並んで, induction 定理と呼ばれる結果がある. G-functor $\mathfrak{a}$と部分群族$\mathfrak{X} \subseteq Sub(G)$に対し,

$$\mathfrak{a}(\mathfrak{X})^G := \sum_{X \in \mathfrak{X}} Im(\tau_X^G : \mathfrak{a}(X) \to \mathfrak{a}(G)) \leq \mathfrak{a}(G),$$

$$K(\mathfrak{a}, \mathfrak{X}) := \{\alpha \in \mathfrak{a}(G) \mid \alpha_X = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{X}\} \leq \mathfrak{a}(G)$$

とおく. 例えば, $\mathfrak{a} = R : H \longmapsto R(H)$(指標環)のときは, $\mathfrak{C} := \{\text{cyclic subgp}\}$, $\mathfrak{H} := \{\text{基本部分群}\}$とおくことにより, 次のよく知られた induction 定理が得られる:

Artin : $\quad |G|\, R(G) \subseteq R(\mathfrak{C})^G.$

Brauer : $\quad R(G) = R(\mathfrak{H})^G.$

一般の G-functor については Dress の定理がある.

<u>定理</u>(Dress)　$\mathcal{A}$ を G-functor，$p$ を素数，$\mathcal{X} \subseteq Sub(G)$，

$$H_p\mathcal{X} := \{H \leq G \mid \exists X \in \mathcal{X} \text{ st } X \trianglelefteq H \text{ かつ } H/X \text{ は } p \text{ 群}\}$$

とおく．このとき，

$$|G|_{p'}\ \mathcal{A}(G) \subseteq \mathcal{A}(H_p\mathcal{X})^G + K(\mathcal{A}, \mathcal{X}).$$

$\mathcal{A} = R$ で $\mathcal{X} = \mathcal{C} = \{cyclic\ subgp\}$ とすれば，Artin の定理と，Brauer の定理の中間段階(hyper-elementary induction)がただちに得られる．($K(R, \mathcal{C}) = 0$ に注意)．いろいろな相対 Grothendieck 群の場合については Dress [Dr.74]．

Dress の定理の証明には，次節で述べる Burnside 環の理論が必要である．

§3．有限群のバーンサイド環．

有限群 G の Burnside 環 B(G) は有限 G 集合のカテゴリーの直和と直積に関する Grothendieck 環である．対応 $H \longmapsto B(H)$ は G-functor になる．これは"ring"であり，指標環への準同型 $B(H) \longrightarrow R(H)$；$[H\backslash G] \longmapsto 1_H{}^G$ は G-functor の"ring homomorphism"を与える．Burnside 環と G-functor の関係は次の補題で明らかになる．

<u>補題</u>．$\mathcal{A}$ を G-functor とすると bilinear map

$$\mathcal{A}(H) \times B(H) \longrightarrow \mathcal{A}(H)\ ;\ (\alpha, [D\backslash H]) \longmapsto \alpha_D{}^H$$

は G-functor の pairing $\mathcal{A} \times B \to \mathcal{A}$ を与える.

つまり Burnside ring は G-functor の理論において, 整数環にあたる. Burnside ring の理論については tom Dieck の本 [Di, 79] に詳しい.

巾等元公式について述べよう. $\mu$ を G の部分群束 $Sub(G)$ の Möbius 関数とする. 即ち, $\mu(H, H)=1$; $\mu(H, K)=0$ if $H \nleq K$; $\sum_{H \leq D \leq K} \mu(H, D) = \delta_{H,K}$. また $\mathbb{Z}_{(p)} := \{a/b \mid a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0,\ (b, p)=1\} \leq \mathbb{Q}$ とおく.

<u>定理</u> (Gluck, Yoshida). (i) $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} B(G)$ の原始巾等元は次の形をしている:

$$e_{G,H} := \frac{1}{|N_G(H)|} \sum_{D \leq H} |D| \mu(D, H) [D \backslash G].$$

$e_{GH} = e_{GK} \Leftrightarrow (H) = (K)$ (i.e. H と K が G で共役).

(ii) $\mathbb{Z}_{(p)} \otimes_{\mathbb{Z}} B(G)$ の原始巾等元は次の形をしている:

$$e^{p}_{G,Q} := \sum_{(H):\, O^p(H) = Q} e_{GH}$$

ここで, $O^p(H) = \langle p'\text{-元} \in H \rangle$ で, Q は p-perfect (i.e. $O^p(Q) = Q$) な部分群である.

この定理より, sub-conjugate closed な $\mathcal{X} \leq Sub(G)$ に対し,

$$\mathbb{Z}_{(p)} \otimes B(G) = \bigoplus_{(Q)} e^{p}_{GQ} (\mathbb{Z}_{(p)} \otimes B(G))$$

$$Q \in \mathcal{H} \iff |G|_{p'} e^{p}_{GQ} \in K(B, \mathcal{H}),$$
$$Q \notin \mathcal{H} \iff |G|_{p'} e^{p}_{GQ} \in B(H_p\mathcal{H})^{G}$$

であることがわかる．これより Burnside 環についての Dress induction 定理が得られる．一般の場合は上の補題による．

他にも多くの応用がある．

定理（Wielandt 1960）．$G$ と $V$ を位数が互いに素な有限群で，$G$ が $V$ に作用しているとする．$\mathcal{C}$ を $G$ の巡回部分群全体，$\mu$ を $Sub(G)$ の Möbius 関数とする．このとき，

$$|C_V(G)|^{|G|} = \prod_{Z \in \mathcal{C}} |C_V(Z)|^{|Z|\nu(Z)},$$

ここで，$\nu(Z) := \sum_{Z \leq D \in \mathcal{C}} \mu(Z, D)$，$C_V(G) := \{v \in V \mid v^g = v \ \forall g \in G\}$.

この定理の証明は $V$ が $FG$-加群，ここで $F$ は標数 $p$ の体，$p \nmid |G|$ の場合に帰着される．$R_F(G)$ を $FG$-加群の Grothendieck 環とする．$p \nmid |G|$ より $K(R_F, \mathcal{C}) = 0$．これより，$B(G) \to R_F(G)$ による $e^{p}_{GH}$ の像 $\varepsilon^{p}_{GH}$ は $H \notin \mathcal{C}$ のとき $0$．中等元公式より

$$|G| \cdot [V] = \sum_{Z \in \mathcal{C}} |Z|\nu(Z)[V_{\downarrow Z}{}^{\uparrow G}].$$

$$\therefore \ |G| \cdot \dim C_V(G) = \sum_{Z} |Z|\nu(Z) \dim C_V(Z).$$

となって Wielandt 位数公式を得る．

同様の方法でガロア拡大の中間体のDedekindゼータ関数や類数の間の関係([Hu, 80], [RS, 82])が得られる。

さて $k$ が $\mathbb{Z}_{(p)}$ 上の可換多元環の場合を考える。このとき、G-functor $\mathcal{B}: H \longmapsto \mathcal{B}(H)$ は直和分解

$$\mathcal{B} = \bigoplus_{(Q)} e^p_{GQ} \mathcal{B}$$

をもつ。ここで、$(Q)$ は $O^p(Q)=Q$ をみたす $Q \le G$ の共役類上を動く。この分解は G-functor $\mathfrak{a}$ の分解

$$\mathfrak{a} = \bigoplus_{(Q)} e^p_{GQ} \mathfrak{a}$$

をひきおこす。$e^p_{GQ}\mathcal{B}$ は $H$-projectiveである。ここで $H \le G$ で $H/Q \in Syl_p(N_G(Q)/Q)$。§2の初めの2つのtransfer定理は次のようになる。

<u>定理</u>: $e^p_{GQ}\,\mathfrak{a}(G) \cong e^p_{N_G(Q),Q}\,\mathfrak{a}(N_G(Q))$.

もし $\mathfrak{a}$ がcohomologicalなら、$e^p_{G1}\,\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$ である。

§4. cohomological G-functor と Hecke 環.

$\mathcal{H}_{kG}$, $\mathcal{M}^{triv}_{kG}$, $\mathcal{M}_{kG}$ をそれぞれ permutation $kG$-modules, trivial source modules, $kG$-modulesのカテゴリーとする。$\mathcal{H}_{kG} \subsetneq \mathcal{M}^{triv}_{kG} \subseteq \mathcal{M}_{kG}$ (full) である。$\mathcal{H}_{kG}$ を Hecke カテゴリーという。

$\mathcal{M}_k(G)^{coh}$ を cohomological G-functorのカテゴリーとす

る．次が基本的である：

<u>定理</u>（[Yo, 83a]）　$\mathcal{M}_k(G)^{coh} \cong [\mathcal{H}_{kG}, \mathcal{M}_k]$ (functor cat),
$\cong [\mathcal{M}_{kG}^{triv}, \mathcal{M}_k]$.

対応は，$\mathfrak{a} \longmapsto (k[H\backslash G] \mapsto \mathfrak{a}(H))$ で与えられる．したがって $\mathfrak{a}$ が cohomological G-functor なら $\mathfrak{a}(H)$ は Hecke 環 $k[H\backslash G/H] \cong End_{kG}(k[H\backslash G])$ 上の加群である．また $kG = \oplus_B e_B kG$ をブロックへの分解とすれば，$\mathfrak{a} = \oplus_B e_B \mathfrak{a}$ となり，$\mathcal{M}_k(G)^{coh}$ でもブロックの概念があることとなる．中心 $Z(kG)$ の $\mathfrak{a}(H)$ への作用は，$\underset{x}{\underset{\psi}{C}}$ を G-共役類，$\alpha \in \mathfrak{a}(H)$ としたとき，$(\bar{C} := \sum_{c\in C} c)$，

$$\mathfrak{a}(H) \times Z(kG) : (\alpha, \bar{C}) \longmapsto |H \cap H^x : C_H(x)|\, \alpha^x$$

で与えられる．このことから次のよく知られた結果を得る：

<u>定理</u>．D が G の p-ブロックの defect 群なら，ある $p'$-元 $x$ とシロー p 群 P があって，$D = P \cap P^x \in Syl_p C_G(x)$.

モジュラー表現との関係で少し述べておこう．$k$ を標数 p の体としておく．カテゴリーの full な埋めこみ

$$\mathbb{C} : \mathcal{M}_{kG} \longrightarrow \mathcal{M}_k(G)^{coh} ; V \longmapsto \mathbb{C}_V$$

ここで $\mathbb{C}_V$ は $\mathbb{C}_V(H) := \{v \in V \mid vh = v \ \ \forall h \in H\}$,

$$Tr_H^K = \tau_H^K : u \longmapsto \sum_{g\in H\backslash K} ug \ \ (trace),$$

$$\sigma_H^g : u \longmapsto ug,$$

$$\rho_H^K : v \mapsto v \quad (\text{inclusion})$$

で定義されるG-functor.

$V$が既約$kG$加群でも$\mathbb{C}_V$は既約とは限らない．実際，

$$\mathbb{C}_V'(H) := \mathrm{Im}\,(\tau_1^H : V \longrightarrow \mathbb{C}_V(H)) \subseteq \mathbb{C}_V(H)$$

とおけば$\mathbb{C}_V' \subseteq \mathbb{C}_V$．するとG-functorは既約なモジュラー指標をさらに分解することになる．ここでモジュラー表現論に習ってG-functorの理論を作ることが一つの目標となる．うまくいく所もあればいかない所もある．例えば丹原氏はカルタン写像

$$c : K_0(\mathcal{M}_k(G)^{coh}) \longrightarrow G_0(\mathcal{M}_k(G)^{coh})$$

が単射でないことを示した．G-functorのカテゴリーでも同様である．それでもG-functorについて$G_0$や$K_0$を考えることは意義がある．

cohomological G-functorとHecke環についての他の話題については[RS. 82], [Fo. 84].

§5. Mackey functor.

1972年の論文で，DressはG-functorの概念を抽象化してMackey functorの概念を導入した．Dressのこの論文は難解だが今も一読に値する．有限群の表現論よりもトポロジーでよく使われる概念である．また最近ではNeukirchに

よって2類体論の簡易化にも使われたと聞く.

<u>Def.</u> 2つのfunctorの対 $M:=(M^*,M_*):\mathcal{S}\longrightarrow\mathcal{B}$ が Mackey functorであるとは, $M^*$ が反変, $M_*$ が共変で, object $X\in\mathcal{S}$ に対し $M^*(X)=M_*(X)$ $(=:M(X))$ で次をみたすものをいう: ($\mathcal{S}$ は pull-back をもつとする).

(M1)
$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "g"'] & Z \end{tikzcd} \text{ が pullback } \Rightarrow \begin{tikzcd} M(W) \arrow[r, "u_*"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & M(X) \\ M(Y) \arrow[u, "v^*"] \arrow[r, "g_*"'] & M(Z) \arrow[u, "f^*"'] \end{tikzcd}$$

ここで $f^*:=M^*(f)$, $g_*:=M_*(g)$ など.

(M2) $M^*$ は $\mathcal{S}$ の直和図式 $X\longrightarrow X+Y\longleftarrow Y$ を直積図式 $M(X)\longleftarrow M(X+Y)\longrightarrow M(Y)$ に写し, 始対象 $\emptyset$ を終対象に写す.

. $\mathcal{S}et_f{}^G$ を有限 $G$ 集合のカテゴリーとすると, $\mathcal{S}et_f{}^G$ は有限直和, 有限直積をもつ. $\mathcal{S}et_f{}^G$ から $\mathfrak{M}_k$ ($k$加群のカテゴリー) への Mackey functor のカテゴリーを $Mc(\mathcal{S}et_f{}^G,\mathfrak{M}_k)$ とする.

<u>補題</u>. $\mathfrak{M}_k(G)\cong Mac(\mathcal{S}et_f{}^G,\mathfrak{M}_k)$.

Mackey functor $M=(M^*,M_*)$ が与えられているとして, $a(H):=M(H\backslash G)$, $\tau_H^K:=M_*(H\backslash G\longrightarrow K\backslash G)$, $\rho_H^K:=M^*($

$H\backslash G \to K\backslash G$) などとすれば G-functor $\mathfrak{a}$ を得る. 逆に G-functor $\mathfrak{a}$ を与えて,

$$M(X) := \Big(\prod_{x\in X} \mathfrak{a}(G_x)\Big)^G \quad (\text{G-fixed point set})$$

ここで, $G_x$ は $x$ の stabilizer, $(\alpha_x)_{x\in X}{}^g := (\alpha_{xg^{-1}}{}^g)_{x\in X}$ によって G を $\prod \mathfrak{a}(G_x)$ に作用させる. $f: X \to Y$ に対し,

$$f_*: (\alpha_x)_x \longmapsto \Big(\sum_{x\in f^{-1}(y)/G_y} \alpha_x{}^{G_y}\Big)_y ,$$

$$f^*: (\beta_y)_y \longmapsto \big(\beta_{f(x)}{}_{G_x}\big)_x$$

とする. これによって M は Mackey functor になる.

この補題によって, G-functor に関する概念は Mackey functor の言葉で書き表わせる. 例えば次は "focal subgroup theorem" の書き換えである.

定理. A が Mackey functor $: \mathcal{E} \to \mathfrak{M}_{\mathbb{Z}}$ で "ring" で, X-projective (ie $A(X) \to\!\!\to A(1)$). M が "A-module" とする. このとき次は完全

$$0 \leftarrow M(1) \xleftarrow{\partial} M(X) \xleftarrow{\partial} M(X^2) \leftarrow \cdots$$

ここで $\partial = \sum (-1)^i M_*(d_i)$, $d_i : X^n \to X^{n-1}$ は face 作用素.

有限群の focal subgroup theorem は $M(X)$ での完全性を意味している. もっと高次での完全性は何を意味しているのだろう.

補題. Mackey functorは表現可能. 即ちあるpreadditiveカテゴリー $\mathcal{S}p(\Sigma)$ へのMackey functor $S_p : \Sigma \rightrightarrows \mathcal{S}p(\Sigma)$ があって, $\forall M \in M_c(\Sigma, \mathcal{B})\ \exists_1\ F : \mathcal{S}p(\Sigma) \to \mathcal{B}$ s.t. $M = F \circ S_p$.
とくに $M_c(\Sigma, \mathcal{B}) \cong [\mathcal{S}p(\Sigma), \mathcal{B}]$.

カテゴリー $\mathcal{S}p(\Sigma)$ は次のようにして作られる.

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{S}p(\Sigma)) = \mathrm{Ob}(\Sigma),$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}p(\Sigma)}(X, Y) = \{ X \xleftarrow{f'} A \xrightarrow{f''} Y \mid A \in \Sigma \} / \cong .$$

ここで $\cong$ は $X \times Y$ 上の object の同型を意味する. $(f', f'')$ と $(g', g'')$ の合成は次で決まる $(h', h'')$ である:

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r] \arrow[d] \arrow[rr, bend left, "h''"] \arrow[dd, bend right, "h'"'] \arrow[dr, phantom, "\text{pull-back}"] & B \arrow[r, "g''"] \arrow[d, "g'"] & Z \\
A \arrow[r, "f''"'] \arrow[d, "f'"'] & Y & \\
X & &
\end{tikzcd}$$

有限群の場合, 次のようなfunctorの列がある.

$$\mathcal{S}et_f{}^G \rightrightarrows \mathcal{S}p(\mathcal{S}et_f{}^G) \longrightarrow H_{kG} \hookrightarrow \mathcal{M}_{kG}$$

$$\begin{array}{lcl}
X & \longmapsto X & \longmapsto kX \\
x \xrightarrow{f} y & \longmapsto (x \xleftarrow{1} x \xrightarrow{f} y) & \\
 & \phantom{\longmapsto} (y \xleftarrow{f} x \rightarrow x) & \\
 & (X \xleftarrow{f'} A \xrightarrow{f''} Y) & \longmapsto (|f'^{-1}(x), f''^{-1}(y)|)_{x,y}.
\end{array}$$

(上の補題を用いて), G-functor の induction などを定義できる;

$$Set_f{}^H \underset{res}{\overset{ind}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\perp}}}} Set_f{}^G$$

$$\therefore\ Sp(Set_f{}^H) \underset{res}{\overset{ind}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\perp T}}}} Sp(Set_f{}^G)$$

$$\therefore\ \mathcal{M}_k(H) \underset{res}{\overset{ind}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\perp T}}}} \mathcal{M}_k(G) \qquad (\text{Kan extension}).$$

J. A. Green などは, functor category $[\mathcal{M}_{kG}{}^{op}, \mathcal{M}_k]$ を考えている. しかし $\mathcal{M}_k(G) \cong [Sp(Set_f{}^G), \mathcal{M}_k]$ や $\mathcal{M}_k(G)^{coh} \cong [H_{kG}, \mathcal{M}_k]$ も色々良い性質を持っている. 例えば $k$ が体などのとき, これらのカテゴリーで既約な object は有限個である.

Mackey functor $M$ があれば, $End_{Sp(\mathcal{E})}(X)$ は $M(X)$ に作用している. 実際 $(X \xleftarrow{f'} A \xrightarrow{f''} X)$ の作用を

$$M(X) \xrightarrow{f'^*} M(A) \xrightarrow{f''_*} M(X)$$

で定義すればよい. この作用を G-functor の言葉でいうと, 作用 $[H, x, A, H] : \mathfrak{a}(H) \longrightarrow \mathfrak{a}(H)$; $\alpha \longmapsto \alpha^x{}_A{}^H$ ということになる. ( Hecke 環の元 $(HxH)$ の作用は $\alpha \longmapsto \alpha^x{}_{H^x \cap H}{}^H$ ).

モジュラー表現の Brauer 準同型について考える. $D \trianglelefteq N \leq G$ とする. このとき, 対応 $X \longmapsto X^D := \{x \in X \mid x\alpha = x \ \forall \alpha \in D\}$ は functor $Br : Set_f{}^G \longrightarrow Set_f{}^N$ を与える. これは次の

functor を誘導する：

$$Br : \mathcal{S}p(\mathcal{S}et_f{}^G) \longrightarrow \mathcal{S}p(\mathcal{S}et_f{}^N) ; X \mapsto X^D.$$

これはさらに次を誘導する：

$$Br : \mathcal{M}_k(N) \longrightarrow \mathcal{M}_k(G).$$

$$br = Z(Br) : Z(\mathcal{S}_p(\mathcal{S}et_f{}^G)) \longrightarrow Z(\mathcal{S}_p(\mathcal{S}et_f{}^N)) \quad (\text{中心}).$$

Hecke category で考えると，D が $p$-部分群 $(p = \mathrm{ch}\,k)$ のときのみ，

$$Br : \mathcal{H}_{kG} \longrightarrow \mathcal{H}_{kN} \quad ; k[X] \longmapsto k[X^D],$$

$$Br : \mathcal{M}_k(N)^{\mathrm{coh}} \longrightarrow \mathcal{M}_k(G)^{\mathrm{coh}},$$

$$\begin{array}{ccccl} br = Z(Br) : & Z(\mathcal{H}_{kG}) & \longrightarrow & Z(\mathcal{H}_{kN}) & \\ & \wr\wr & & \wr\wr & \\ & Z(kG) & \longrightarrow & Z(kN) & ; \sum_{g \in G} a_g g \mapsto \sum_{g \in C_N(D)} a_g g \end{array}.$$

が誘導され，最後の br は Brauer 準同形である．したがって Br は Brauer functor と呼ぶのがふさわしい．

§6. 組合せ論への応用．

組合せ論への応用が当然考えられる．例えば $(P, B)$ をブロックデザインとし，$A := \{(p, b) \mid p \in b \in B\} \subseteq P \times B$ とおけば自然な写像 $P \leftarrow A \rightarrow B$ がある．これは $\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}p(\mathcal{S}et_f)}(P, B)$ の元とみなせる．

明らかに $\mathcal{S}p(\mathcal{S}et_f) \simeq \mathrm{Mat}_{\mathbb{N}_0}$，$\mathcal{H}_k \simeq \mathrm{Mat}_k$．ここで $\mathrm{Mat}_k$ は object が有限集合で，$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mat}_k}(X, Y) = \mathrm{Mat}(X \times Y ; k)$

（X×Y 型の行列全体）．したがって代数的組合せ論のいくつかの概念や結果を G-functor や Mackey functor という面から見ることもできる．以下では有限集合のカテゴリー $\mathcal{S}et_f$ のかわりに有限 G-集合のカテゴリー $\mathcal{S}et_f^G$ で考える．これは有限群 G の作用している組合せ論を研究するのに役立つと思う．群の作用がない場合は与えられた結合構造から何かの functor category を作り，そこで同じように Hecke 環などを調べるということになる．しかしまだ成果は上がっていない．

次は Fischer の不等式である．

<u>定理</u>．$(P, B)$ を $2$-$(v, k, r, b, \lambda)$ デザインで $G \leq Aut(P, B)$ とする．可換環 $R$ において，$r$, $k$, $n := r-\lambda$ は可逆と仮定する．$\mathfrak{a}$ を $R$ 係数の cohomological G-functor とする．このとき，

$$\bigoplus_{p \in P/G} \mathfrak{a}(G_p) \text{ は } \bigoplus_{b \in B/G} \mathfrak{a}(G_b) \text{ の直和因子．}$$

（ここで $p \in P/G$ は完全代表系をとり，$G_p$ は $p$ の stabilizer）．

実際，$M : \mathcal{H}_{RG} \longrightarrow \mathcal{M}_R$ を $\mathfrak{a}$ に対応する functor とする．

$$(r-\lambda)I + \lambda J : RP \xrightarrow{A} RB \xrightarrow{{}^tA} RP$$

は同型（$\det = rk(v-\lambda)^{v-1} \in R^*$）だから，$M$ で飛ばすと，定理を得る．

$\mathfrak{a} = \mathbb{C}_a$ とすることによって有名な $|P/G| \leq |B/G|$ を得る．また $RP \mid RB$ もわかる．なお $A$, ${}^tA$ の誘導する写像は次で与えられる：

$$A : \Big(\bigoplus_{p\in P} \mathfrak{a}(G_p)\Big)^G \longrightarrow \Big(\bigoplus_{b\in B} \mathfrak{a}(G_b)\Big)^G$$

$$(\alpha_p)_{p\in P} \longmapsto \Big(\sum_{p\in b/G_b} \alpha_p{}_{G_{pb}}^{\;G_b}\Big)_{b\in B},$$

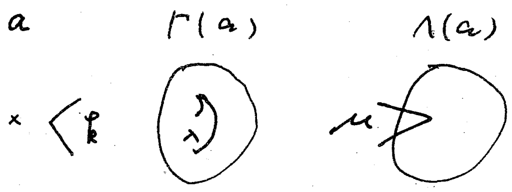
$${}^tA : (\beta_b)_{b\in B} \longmapsto \Big(\sum_{\substack{b\in B/G_p \\ ;\, p\in b}} \beta_b{}_{G_{pb}}^{\;G_p}\Big)_{p\in P}.$$

ここで $p\in b/G_b$ は $p$ がブロック $b$ の $G_b$-orbit の完全代表系を動くことを意味する．

最後に強正則グラフ $(X, E)$ を考える．$G \leq Aut(X, E)$ とする．$E = {}^tE \subseteq X\times X$ だから $(X \leftarrow E \rightarrow X) \in End_{Sp(Set_f{}^G)}(X)$ である．しかし $Sp(Set_f{}^G)$ では計算がうまくゆかずやはり $H_{RG}$ で考えざるを得ない．$X \leftarrow E \rightarrow X$ を $H_{RG}$ に落とすと

$$A : RX \longrightarrow RX\ ;\quad x \longmapsto \sum_{y\in\Gamma(x)} y$$

となる．ここで $\Gamma(x) = \{y\in X \mid (x,y)\in E\}$．仮定によって $|\Gamma(x)| = k = const$．$A$ を行列で書いたものが結合行列である．パラメータ $n := |X| = 1+k+l$, $\lambda$, $\mu$ は次の図で定まる：




$n = 1 + k + l$、

すると，$A$ の最小多項式は

$$(A - k)(A^2 - (\lambda-\mu)A - (k-\mu)) = 0 .$$

さて $\mathcal{A}$ を cohomological $G$-functor とすると，$A$ は次の写像を誘導する：

$$\rho_A : \Big(\bigoplus_{x\in X} \mathcal{A}(G_x)\Big)^G \longrightarrow \Big(\bigoplus_{x\in X} \mathcal{A}(G_x)\Big)^G$$

$$(\alpha_x)_{x\in X} \longmapsto \Big(\sum_{y\in\Gamma(x)/G_x} \alpha_y{}_{G_{xy}}^{G_x}\Big)_{x\in X} .$$

とくに $G$ が $X$ 上可移で，$H := G_\infty$, $\infty\in X$ とすると，

$$\rho_A : \mathcal{A}(H)\to\mathcal{A}(H) ;\ \alpha \longmapsto \sum_{HgH\in H\backslash G/H :\ \infty g\in\Gamma(\infty)} \alpha^g{}_{H^g\cap H}^{H}$$

したがって $G$ が $X$ 上 rank 3 なら，これは Hecke 環の元 $(HgH)$ の作用 $\alpha \longmapsto \alpha^g{}_{H^g\cap H}^{H}$ と一致する．

$\rho_A$ も $A$ と同じ多項式を $0$ にするので，$G$ 集合でない場合に習って $G$ の作用をもつ強正則グラフを研究できる．例えば $G$ が素数位数の巡回群で $X$ 上正則に作用する場合を考える．すると $\rho := \sum_{g\in G:\ \infty g\in\Gamma(\infty)} g \in \mathbb{Q}G$ も $A$ と同じ多項式を $0$ にする．$\mathbb{Q}G \cong \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}(e^{2\pi i/p})$ だから整数論的議論により（ガウスの和），$(X, E)$ が Paley グラフかその dual となる．

次に $G$ が $X$ 上可移，$H=G_\infty$ $(\infty\in X)$，$P\in Syl_p G$，$N_G(P)\subseteq H$，さらに $P$ は可換と仮定する．G-functor

$$G: H\longmapsto H_1(H, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})\cong H/H^p[H,H]$$

をとる．transfer の計算によって，$\rho_A=0$ となる．したがって $0$ が $(x-k)(x^2-(\lambda-\mu)x-(k-\mu))=0$ の $GF(p)$ での根となる．結局，上の仮定のもとで

$$k\equiv 0 \text{ or } \mu \mod p \quad \text{if } \exists H_0 \overset{p}{\triangleleft} H$$

となる．

§∞．あとがき．

Mackey functor の理論はさらに発展する．$A$ を有限カテゴリーとし，$\varphi: \mathbb{Z}[A/\cong]\longrightarrow \mathbb{Z}^{A/\cong}$；$a\longmapsto(|A(i,a)|)_i$ とおく．$A$ が unique epi-mono 分解性をもち，$^\forall a\in A$ $^\forall\sigma\in Aut(a)$ に対する $1_a$ と $\sigma$ の等化 $a/\langle\sigma\rangle$ の存在を仮定すると，$\varphi$ は単射で有限余核をもち，$\varphi$ の像は部分環となる．したがって $\mathbb{Z}[A/\cong]$ は環構造をもつ．これを Abstract Burnside ring という．これから Abstract Hecke カテゴリー，Abstract Mackey functor が順に定義される．この理論は数値計算法や母関数の理論（Rota）とも接している．近く論文として出る予定である．

## References for Transfers.

[Di.73] Tammo tom Dieck, Equivariant homology and Mackey functors, Math. Ann. 206 (1973), 67-78.

[Di.79] Tammo tom Dieck, "Transformation groups and representation theory", Lecture Notes in Math., 766, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1979.

[Dr.69] Andreas Dress, A characterization of solvable groups, Math. Z. 110 (1969),213-217.

[Dr.71] Andreas Dress, Notes on the Theory of Representations of Finite Groups I: The Burnside ring of a finite groups and some AGN-applications, Multicopied lecture notes, Bielefeld, 1971.

[Dr.72] Andreas Dress, Contributions to the theory of induced representations, in "Algebraic K-Theory II", Proc. Battle Institute Conference 1972, Springer Lecture Notes in Math., 342 (1973), 183-240.

[Dr.74] Andreas Dress, On relative Grothendieck rings, Springer Lecture Notes in Math., 488 (1974), 79-131.

[Fo.84] Timothy J. Ford, Hecke actions on Brauer groups, J. Pure and Applied Algebra 33 (1984), 11-17.

[Gl.81] David Gluck, Idempotent formula for the Burnside algebra with applications to the p-subgroup simlicial complex, Illinois J. Math. 25 (1981), 63-67.

[Gr.64] J. A. Green, A transfer theorem for modular representations, J. Algebra, 1 (1964), 73-84.

[Gr.71] J. A. Green, Axiomatic representation theory for finite groups, J. Pure and Applied Algebra, 1 (1971), 41-77.

[Hu.79] D. Husemoller, Burnside ring of a Galois group and the relations between zeta functions of intermediate fields,The Santa Cruz Conference on Finite Groups (Univ. California, Santa Cruz, Calif., 1979), pp. 603-610, Proc. Symp. in Pure Math., 37, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1980.

[La.68] Tsit-Yuan Lam, Induction theorems for Grothendieck groups and Whitehead groups, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., 4e serie, 1 (1968), 91-148.

[RS.82] Klaus Roggenkamp and Leonard Scott, Hecke actions on Picard groups, J. Pure and Applied Algebra, 26 (1982), 85-100.

[Sa.82] Hiroki Sasaki, Green correspondence and transfer theorems of Wielandt type for G-functors, J. Algebra, 79 (1982), 98-120.

[Wi.60] Helmut Wielandt, Beziehungen zwischen den Fixpunktzahlen von Automorphismengruppen einer endlichen Gruppe, Math. Zeitschr., 73 (1960), 146-158.

[Yo.78] Tomoyuki Yoshida, Character-theoretic transfer, J.

Algebra, 52 (1978), 1-38.

[Yo.80] Tomoyuki Yoshida, On G-functors (I):Transfer theorems for cohomological G-functors, Hokkaido Math. J., 9 (1980), 222-257.

[Yo.83a] Tomoyuki Yoshida, On G-functors (II):Hecke operators and G-functors, J. Math. Soc. Japan, 35 (1983), 179-190.

[Yo.83b] Tomoyuki Yoshida, Idempotents of Burnside rings and Dress induction theorem, J. Algebra, 80 (1983), 90-105.